981. 一般ナル係数体ヲ有スル代数函数体及ビ多元環ニツイテ II

稲葉 榮次 (海兵)

代数函数体相互ノ関係ハ classic ナ場合ニハ algebraische Korrespondenz ノ理論等ガアルガ，(コレハ Deuring ニヨッテ抽象化サレタ)，コヽデハ係数体ガ一般ナル場合，係数体ヲ種々変ヘタトキニ於ケル代数函数体相互ノ関係ヲシラベル。係数体ヲ変ヘルノハ単ナル拡大デハ餘リ興味ガナイガ，Restbildung (剰餘体ヲトルコト) ニ依ル場合ヲ考ヘルト種々應用サレル所ガアッテ興味ガアルト思フ。(Eichler ハ Hilbert ノ Irreduzibilitätssatz ヲ証明スルトキニ應用シタ)．コヽデハコノ Restbildung ノ理論ヲ完成シテ示性数，因子類群ノ構造等ニ関シ注目スベキ結果ガ得ラレルコトヲ述ベタイ。

係数体ノ Restbildung トカ拡大トカハ後ニ述ベル Resthomomorphism ナル概念ニ統一サレル．之レニ依ッテ係数体ガ一般ナル場合カラ特殊ナル場合ニ移リ得ル．係数体ガ特殊ナル場合ノ結果ヲ単ナル抽象的方法ニヨッテ係数体ガ一般ナル場合ニ拡張スルコトガ困難ナルトキニ，コノ Resthomomorphismus ノ理論ニヨリ一般ナ場合ノ結果ガ得ラレルコトガアル。コレハ代数函数体ニ限ラズ多元環ニ就テモ云ヘル．更ニ一般ナル体ノ上ノ Abel 体ノ理

論ノ如キモノモ建設シ得ルノデアル。

§ 1

Ω が任意ノ体トスル. Rang 有限ナル Ω-Modul S が同時ニ Ring デアルトスル。即チ S ハ Ω ヲ係數体トスル多元環デアル. $u_i (i=1,2,\cdots\cdots n)$ ヲソノ Basis トシタトキ

$$u_i u_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} u_k, \quad c_{ijk} \subset \Omega$$

$$i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

ニ於ケル Multiplikationskonstanten c_{ijk} 及ビ 1 ヲスベテ含ム如キ Ω ノ Unterring ヲ R トスル. R ニ於ケル teilerlas ナ Primideal 或ハ Nullideal $\mathfrak{p}$ ニヨル R ノ Restklassenring ヲ $\overline{\Omega}$ トス. $\mathfrak{p}$ が Nullideal ナルトキハ R ハ Ω ノ Unterkörper ナルモノトスレバ $\overline{\Omega}$ ハ常ニ Körper トナル. Ω ニ於ケル c_{ijk} ニ對應スルモノが $\overline{\Omega}$ ニ於テ $\overline{c_{ijk}}$ ナリトス. シカラバ

$$\overline{u}_i \overline{u}_j = \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{ijk}}\, \overline{u}_k$$

ナル関係ニヨッテ $\overline{u}_i (i=1,2,\cdots\cdots n)$ ヲ Basis トシ $\overline{\Omega}$ ヲ係數体トスル多元環 $\overline{S}$ が出來ル. $\overline{S}$ ヲ S ノ $R, \mathfrak{p}$ ニヨル Restbild トイフコトニスル. コノ際 $\overline{S}$ ハ S ニ Resthomomorph トイフ. 亦 Ideal $\mathfrak{p}$ ハ Abbildungsideal トイフコトニスル. S ノ中デ $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$, $c_i \subset R$ ナル元ノ集合ハ S ノ Unterring デコレヲ S' ト記シ, $\overline{S}$ ノ eigentliches Urbild トイフ。

亦 $\sum_{i=1}^{n} c_i u_i$, $c_i \subset \mathfrak{p}$ ナル S' ノ元ノ集合ハ S' ニ於ケル Ideal デアッテ, コノ Ideal ニヨル S' ノ Restklassenring ガ $\overline{S}$ ト同型トナル. (以後 Resthomomorphism ニ依ッテ生ズルモノハ bar ヲツケテ示スコトニスル)。

Resthomomorphismus ガ Basis u_i ノ撰ビ方ニ如何ニ関係スルカハ次ノ如クデアル. S ノ他ノ Basis u'_i ガ S' ノ Basis ナルトキハ u'_i ニヨッテ作ッタ S ノ $R, \mathfrak{p}$ ニヨル Restbild ハ u_i ニヨッテ作ッタ S ノ $R, \mathfrak{p}$ ニヨル Restbild ト同型デアル. 何トナレバ

$$u'_t = \sum_j b_{tj} u_j, \quad b_{tj} \subset R, \quad u_i = \sum_t a_{it} u'_t, \quad a_{it} \subset R$$

デアルカラ u'_i ノ Multiplikationskonstanten ハ R ニ属シ, 亦 $\sum_i \overline{c}_i \overline{u}_i$ ニハ $\sum_t \overline{\sum_i c_i a_{it}}\ \overline{u}'_t$ ヲ対応サセルコトニスレバ同型トナルコトガ容易ニワカル. 一般ニ $R, \mathfrak{p}$ ノ如何ニ関セズ S ヨリ同型ナル Restbild ヲ生ゼシムル如キニツノ Resthomomorphismus ヲ同等 (äquivalent) トイフ。

〔定理 1〕 Resthomomorphismus Υ_1 ニヨッテ S ノ Restbild $\overline{S}$ ガ生ジ, Resthomomorphismus

γ_2 ニヨッテ $\overline{S}$ ノ *Restbild* $\overline{\overline{S}}$ ガ生ズルトキ，S ヨリ $\overline{\overline{S}}$ ニ同型ナル *Restbild* ヲ生ゼムル如キ *Resthomomorphismus* γ ガ存在スル．

コノ場合 γ ハ γ_1 ト γ_2 ノ積ナリトイフ．$\gamma = \gamma_1 \gamma_2$

〔証〕 γ_1 ハ $R, \mathfrak{p}$ ニヨリ，γ_2 ハ $\overline{R}, \overline{\mathfrak{p}}$ ニヨルモノトス．

$\overline{R}/\overline{\mathfrak{p}} = \overline{\overline{\Omega}}$ トシ，$\overline{R}$ ノ Ω ニ於ケル *Urbild* ヲ R' トスレバ $R' \subset R$．$\overline{\mathfrak{p}}$ ノ Ω ニ於ケル *Urbild* ヲ $\mathfrak{p}'$ トスレバ $\mathfrak{p}'$ ハ R' ニ於ケル *Ideal* デアッテ $\mathfrak{p}$ ヲ含ム

$$R'/\mathfrak{p}' \cong {}^{R'/\mathfrak{p}}\!\big/_{\mathfrak{p}'/\mathfrak{p}} \cong \overline{R}/\overline{\mathfrak{p}} \cong \overline{\overline{\Omega}}$$

故ニ $\mathfrak{p}'$ ハ R' ニ於ケル *teilerlos* ナ *Primideal* カ *Nullideal* デアル．$\mathfrak{p}'$ ノ *Nullideal* ナラバ R' ハ *Körper* デアル．$R', \mathfrak{p}'$ ニヨル *Resthomomorphismus* ヲ γ トスル．　　　　(証終)

Abbildungsideal $\mathfrak{p}$ ガ *Nullideal* ナルトキ $\overline{\Omega} = R$ ハ Ω ノ *Unterkörper* デアッテ $\overline{S}$ ハ S ノ部分環トナル．カヽル *Resthomomorphismus* ヲ *Koeffizientenverengung* トイフ．亦 $\mathfrak{p}$ ガ *Null* デナイトキハ R ハ *Körper* デナイ（モシ体ナラバ $\overline{\Omega}$ ハ零ノミトナル）．ソコデ R ノ *Quotientenkörper* L ヲ作ル．$\Omega \cong L$ ナルトキカヽル *Resthomomorphismus* ヲ *Restbildung* トイフ．一般ニ Ω ハ L ニ同型ナ体ヲ含ムカラ *Resthomomorphis* mus ハ Koeffizientenverengung（係數体縮少）トRestbildung ノ積ニナル．R ノ Quotientenkörper ガ Ω ト同型ナルトキハ C_{ijk} ガ R ニ含マレヌトキハ，Basis u_i ヲ変ズルコトニヨリ Multiplikationskonstanten ガ R ニ属スル如クニナル。

係數体 Ω ガソノアル部分体 k ニ関シ transzendenzgrad 有限デ Ω ニ含マレル $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t$ ガ k ノ上デ代數的ニ独立トスル．コノ場合 Ω ガ $k(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t)$ ノ有限次代數的拡大ナラバ S ハ k ニ関シ Dimension 有限デ t ナリトイフ．特ニ k ガ Primkörper ナルトキハ absolute Dimension 有限デ t ナリトイフ。

〔定理2〕 任意ノ多元環 S ハ Koeffizientenverengung ニヨリ Restbild ガ Ω ノ任意ノ Unterkörper k ニ関シ Dimension 有限トナル如クシ得ル。

〔証〕 k ニ C_{ijk} ヲスベテ添加シタモノヲ R トスル如キ係數体縮少ヲトレバイヽ。

〔定義〕 Ω ノアル部分体 k ニツイテ k ト $\mathfrak{P}$ ノ共通部分 0 ナルトキ，カヽル Restbildung ヲ k ノ上ノ Restbildung トイフ．コノトキ $\bar{\Omega}$ ハ k ニ同型ナルモノヲ含ム。

一般ニ Ω ノ標數ト $\bar{\Omega}$ ノ標數ト同ジナル如キ RestbildungヲCharakteristiktrenトイフ．任意ノkノ上ノRestbildungハcharakteristiktrenデアル．

kニ関シDimension有限ナルSニツイテkノ上ノRestbildungアルトキΩノkニ関スルTranszendenzgradヨリ$\bar{\Omega}$ノソレヲ減ジタルモノヲソノRestbildungノdimensionトイフ。

〔定理3〕 kノ上ノRestbildungノdimensionハ零ヨリ大デアル。

〔証〕 kノ上ノRestbildungノdimensionハ明ラカニ零ヨリ小デハナイ．モシ零ナラバ，$\bar{\Omega}$ノNullニabbildサレルモノハkノ代数的拡大ニ属スルRノ元ダケデアル。ソノ元ノkニ於テ満足スル方程式（係数$\subset[k, R]$）ヲ作レバソノ常数項ハ$\mathfrak{p}$ニ属スルコトニナリ$[k, \mathfrak{p}]=0$ノハヅダカラ$\mathfrak{p}$ハNullidealトナリ不合理デアル。

〔定理4〕 kニ関シdimension有限ナルSニツイテkノ上ノRestbildung r_1ガアリ，ソノRestbildニツキ，kノ上ノRestbildung r_2ガアルトキ

$$\dim r_1 + \dim r_2 = \dim r_1 r_2$$

〔定理5〕 kニ関シdimension有限tナルSニツイテtヨリ大デナイ任意ノdimensionノkノ上ノRestbildungガ無数ニ存在スル。

特ニ Resthild ノ係數体 $\bar{\Omega}$ ガ k ノ有限次代數的拡大トナル如キ k ノ上ノ Restbildung ガ存在スル。

(証) Ω ハ $k(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t)$ ノ有限次代数的拡大トス. Ω ハ Ω ニ含マレル $k(\xi_2, \cdots\cdots \xi_t)$ ノ最大代数的拡大 k_1 ヲ常数体トシ ξ_1 ヲ不定元トスル代數函數体ト考ヘ, スベテノ $C_{ij}k$ ガ $\mathfrak{p}$-ganz ナル如ク素因子 $\mathfrak{p}$ ヲトル. 分母ガ $\mathfrak{p}$ ニ素ナル Ω ノ元全体ヲ Ring R トスル. コノ中デ分子ガ $\mathfrak{p}$ デ割レル元ノ集合ハ R ニ於ケル Primideal $\mathfrak{p}_R$ デアル。$R, \mathfrak{p}_R$ ニヨル Restbildung ニヨッテ $\bar{\Omega}$ ハ k_1 ノ有限次代数的拡大トナル. カクシテ $\bar{S}$ ハ k ニ関シテ dimension $t-1$ トナル. ガヽル Restbildung ヲ繰リ返セバイヽ。 (証終)

［定理6］ k ニ関シ dimension 有限 t ナル S ニツイテ dimension r ナル k ノ上ノ Restbildung ハ dimension 1 ナル r 個ノ k ノ上ノ Restbildung ノ積ト同等デアル。

(証) 一般ニ $r \leqq t$ デアルガ $r=t$ ナル場合ニ証スレバ充分デアル. 何トナレバ k ニ関シテ dimension 有限ナル S ハ Ω ノ部分体デ k ヲ含ム体 k' ニ関シテモ dimension 有限デアリ, 又 $\bar{\Omega}$ ガ k' ヲ含ムトキハ, コノ k ノ上ノ Restbildung ハ k' ノ上ノ Restbildung ト考ヘテモ dimension 同ジデアルカラデアル。

Ω ハ R ノ Quotientenkörper ダカラ R ニ於テ k ニ関シ algebraisch unabhängig ナモノ t 個アリ.

コレヲ $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t$ トスル. ξ_i ノ係數 k ニ屬スル多項式デ $\mathfrak{p}$ ニ屬スル最低次ノモノ $f_i(\xi_i)$ トス. ξ_i ノ $\bar{\Omega}$ ニ於テ對應スル元ヲ $\bar{\xi}_i$ トスレバコレハ $f_i(\bar{\xi}_i)=0$ ノ根デアル。

スベテノ $\bar{\xi}_i$ ヲ k ニ添加シタ体ヲ Λ トス. R ノ Quotientenkörper ガ Ω デアルカラ, R ニ屬スル $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots \eta_\nu$ ヲ $k(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t)$ ニ添加シテ Ω トナル如クシ得ル. シカモ η_j ハ最高冪ノ係數 1 ニシテ $k[\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t; \eta_1, \eta_2, \cdots\cdots \eta_{j-1}]$ ナル多項式整域ニ屬スル係數ヲ有スル既約方程式ヲ滿足スル如クナシ得ル. η_1 ノ $\bar{\Omega}$ ニ於テ對應スル元 $\bar{\eta}_1$ ハ η_1 ノ $k(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t)$ ニ於ケル既約多項式ニ於テ $\xi_i \longrightarrow \bar{\xi}_i$ トシタトキノ Λ ニ於ケル既約因數 $\varphi_1(\bar{\eta}_1)$ ヲ零ナラシム. 同様ニ $\bar{\eta}_2$ ハ η_2 ノ $k[\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots \xi_t; \eta_1]$ ニ於ケル既約多項式ニ於テ $\xi_i \longrightarrow \bar{\xi}_i$, $\eta_1 \longrightarrow \bar{\eta}_1$ トシタトキノ既約因數 $\varphi_2(\bar{\eta}_2)$ ヲ零ナラシム. 以下同様.

$\bar{\Omega}$ ハコレ等 $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_j$ ヲスベテ k ニ添加シテ出来タ体デアル。

今 $k = k(\xi_2, \cdots\cdots \xi_t)$, $R_1 = k_1[\xi_1, \eta_1, \eta_2, \cdots\cdots \eta_\nu]$ トオキ, $k_1(\xi_1)$ ニ於テ mod $f_1(\xi_1)$ トシタトキノ η_1 ノ滿足スル既約方程式ヲ $\varphi_1^{(1)}(\eta_1) \equiv 0$ トス. コレハ

$\xi_1 \to \bar{\xi}_1$ トスレバ $k_1(\bar{\xi}_1)$ ニ於テ η_1 ノ満足スル既約方程式デアル。同様ニ mod $f_1(\xi_1)$ トシタトキ $k_1(\xi_1, \eta_1)$ ニ於ケル η_2 ノ満足スル既約方程式 $\varphi_2^{(1)}(\eta_2) \equiv 0$，以下同様。

但シ $\varphi_j^{(1)}(\eta_j)$ ハ $\xi_i \longrightarrow \bar{\xi}_i$ …… トシタトキ $\varphi_j(\eta_j)$ トル因数ヲ有スル方ナリトス。カヽル $\varphi_1^{(1)}(\eta_1), \cdots\cdots \varphi_\nu^{(1)}(\eta_\nu)$ 及ビ $f_1(\xi_1)$ ヲ Basis トスル Ideal ハ R_1 ニ於ケル teilerlos ナ Primideal デ，コレニヨル餘剰体ハ k_1 ノ有限次代數的拡大デアル．カクノ如キコトヲ繰リ返シ，最後ニ $k = \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots\cdots \overline{\xi_{t-1}}$ ヲ添加シタ体 $k^{(t-1)}$ ヲ係數体トシテ $k^{(t-1)}[\xi_t, \eta_1, \eta_2, \cdots\cdots \eta_\nu]$ ヲ R_t トシタトキ，$f_t(\xi_t)$ ノ $k^{(t-1)}$ ニ於ケル既約因數デ $\bar{\xi}_t$ ノ満足スルモノ $f_t^{(t)}(\xi_t)$，$k^{(t-1)}$ ニ於テ mod $f_t^{(t)}(\xi_t)$ トシタトキノ $\varphi_j^{(1)}(\eta_j)$ $(j = 1, 2, \cdots\cdots)$ ノ既約因數デ $\bar{\eta}_j$ ノ満足スルモノ $\varphi_j^{(t)}(\eta_j)$ ヲ Basis トシタ R_t ニ於ケル Primideal ニヨル Restbildung ニヨッテ丁度 t 個ノ dimension ノナル Restbildung ノ積ノ結果ガ得ラレル。

コノ結果ノ Restbild ハ $\bar{\Omega}$ ヲ係數体ニ有シ，$R/\mathfrak{P}$ ニヨル結果ト同一デアル。 （証終）

〔定義〕 Ω ノソレニ含マレル Primkörper ニ関スル Transzendenzgrad ガ有限デ $\bar{\Omega}$ ノソレニ含マレル Primkörper ニ関スル Transzendenzgrad ニ等シイトキコノ Restbildung ヲ null-dimentional トイフ. 特ニ$\mathfrak{R}$ガ代數数体ナルトキハ absolut null-dimensional ナ Restbildung トイフ.

〔定理7〕 $\mathfrak{R}$ ノ標數 $p \neq 0$ ナラバ null-dimensional ナ Restbildung ハ存在セヌ. $\mathfrak{R}$ ノ標数 $p = 0$ ナルトキハ null-dimensional ナ Restbildung 存在シ, $\bar{\mathfrak{R}}$ ノ標數 $\neq 0$ トナル. 即チ null-dimensional ナ Restbildung ハ charakteristiktren デハナイ。

(証) $\bar{\mathfrak{R}}$ ノ Null = abbild サレルモノ a ハ $\mathfrak{R}$ = 屬スル Primkörper k ノ代数的拡大ニ属スル. ソコデ標数 $\neq 0$ ナルトキハ, a ガアル有限体ニ属シ, $a^{p^f-1} = 1$ トナリ, 1 ガ abbildungsideal $\mathfrak{P}$ ニ属スルコトニナリ $\mathfrak{P} = R$ トナッテ不合理。

次ニ標數 $= 0$ ナルトキハ, a ハ k ノ有限次代数的拡大ニ属スルカラ a ノ k ニ於テ満足スル既約方程式 (係数 $\subset R$) ノ常数項ハ $\mathfrak{P}$ ニ属シ, 従ッテアル有理素数 p' ガ $\mathfrak{P}$ ニ属スル。

故ニ任意ノ R ノ元 ω ニツイテ $p'\omega \subset \mathfrak{P}$. $\therefore$ $\bar{\mathfrak{R}}$ ノ標數 $= p' \neq 0$ トナル。

(系) $\mathfrak{R}$ ノ標数 $\neq 0$ ナラバ Restbildung ハスベテ Charakteristiktren デアル. 一般ニ Restbildung ガ charkteristiktren ナラバ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ含マレル Primkörper ノ algebraisch-abgeschlassen Hülle ニ同型ナルモノヲ含ム。

§ 2

Sガ特ニ常數体 Λ ト不定元 z ヲ有スル代數函数体ノ場合ニツイテ考フ。コノ場合ハ $\mathfrak{K}=\Lambda(z)$ デアル。Λ ハアル Integritatsbereich I ノ Quotientenkörper デアルトスル。I ニ於ケル teilerlos ナ Primideal $\mathfrak{p}$ ヲトリ，$\Lambda(z)$ ノ元ニシテ係數ガスベテ I ニ属シ，分母ノ係數ノ内ニ $\mathfrak{p}$ ニ属サヌモノアルトキ，カヽル元ヲ $\mathfrak{p}$-ganz トイフ。カヽル元ノ集合ハ Ring デアッテコレヲ R トスル。R ニ於テ分子ノ係數ガスベテ $\mathfrak{p}$ ニ属スル如キモノノ集合ハ R ニ於ケル teilerlos ナ Primideal デアル。

コレヲ Abbildungsideal $\mathfrak{p}$ ニトル。$\bar{\Lambda}=I/\mathfrak{p}$ トスルトキ $R/\mathfrak{p}$ ハ $\bar{\Lambda}(z)$ ト同型デアル。Restbild ハ $\bar{\Lambda}(z)$ ヲ係數体トスル多元環デアルガコレガ亦代數函数体ナルカト云フニ必ズシモソウデハナイ。

〔定理8〕 Λ ハ有限次代數數体或ハ任意ノ常數体ヲ有スル代數函数体トスル。K ハ $\Lambda(z)$ ノ有限次 einfach ナ代數的拡大体トシ，且ツ Λ ノ代數的拡大ト unabhängig トスル。シカラバ Restbild $\bar{K}$ ガ亦 $\bar{\Lambda}(z)$ ノ有限次 einfach ナ代數的拡大体ニシテ $\bar{\Lambda}$ ノ代數的拡大ト unabhängig ナル如キ Restbildung ガ無數ニ存在スル。

（証） Λ ガ有限次代數數体ナルトキハアル Primideal ニツイテ ganz ナ元全体ヲ I トシ，ソノ中デソノ Primideal デ割レル元全体ヲ $\mathfrak{p}$ トスル。Λ ガ代數函數

体ナルトキハアル素因子ニツイテ ganz ナ元全体ヲIニトリ，Iノ中デソノ素因子デ割レル元全体ヲ$\mathfrak{P}$トスル．シカラバ有限個ノ$\mathfrak{P}$ヲ除キ，Restbild が定理8ノ如クナルコトが云ヘル。

Kハ$\Lambda(z)$ニuヲ添加シテ生ジタトスルトキ，Kハ$\Lambda(z)$ヲ係数体トシ，$1, u, u^2, \cdots\cdots u^{n-1}$ヲ Basis トスル多元環ト考ヘラレル．但シ

$$u^n + c_1 u^{n-1} + \cdots\cdots + c_n = 0$$

コヽデc_iハ Multiplikasionskonstanten ニ相当スル。

Restbildung ニヨッテ$\overline{\Lambda}(z)$ヲ係数体トシ，$1, \overline{u}, \overline{u^2}, \cdots\cdots \overline{u}^{n-1}$ヲ Basis トスル多元環$\overline{K}$が出来ル．

但シ

$$\overline{u}^n + \overline{c}_1 \overline{u}^{n-1} + \cdots\cdots + \overline{c}_n = 0$$

コノ式ノ左辺ノ$\overline{u}$ノ多項式が$\overline{\Lambda}(z)$ニ於テ既約ナルカ，或ハ$\overline{K}$ニ Nullteiler がナイコトがワカレバ，$\overline{K}$ハ体トナルノデアル．ソレヲ証明スルノニハΛヲ任意ニ代数的ニ拡大シテ証明シテヨイ。（Λが代数数体ノ場合ハ Eichler ノ証明がアルが，コヽデハ別ノ方法ヲ採ル）

〔Lemma〕 $K = \Lambda(z, y)$ナルトキzノ$\Lambda(y)$ニ於テ満足スル既約方程式$f_y(z)$トシ$\overline{f_y(z)}$ハ絶対既約ナリトス．シカラバyノ$\Lambda(z)$ニ於テ満足スル既約方程式ヲ$\varphi_z(y)$トスルトキ$\overline{\varphi_z(y)}$モ絶対既約トナル．但シ有限個ノ$\mathfrak{P}$ヲ除ク．

（証）　$f_y(z) = \dfrac{p(z, y)}{A(y)}$

$p(z, y)$ ハ y, z ノ多項式，$A(y)$ ハ y ノ多項式トス．y ハ Λ ノ代數的拡大ニ屬セヌカラ $\varphi_z(y)$ ト $A(y)$ ハ素デ $p(z, y)$ ハ $\varphi_z(y)$ デ割レル。

$$f_y(z) = \frac{\varphi_z(y)\,K(y, z)}{A(y)}$$

$$L_z(y)\,\varphi_z(y) + M_z(y)\,A(y) = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

多項式 $A, P, K, L, M, f_y, \varphi_z$ 等ノ係數 $\mathfrak{F}$-ganz ナル如ク $\mathfrak{F}$ ヲ撰ブ．$A(y)$, $\varphi_z(y)$, $f_y(z)$ ノ最高冪ノ係數ハ 1 トス．$\overline{\varphi_z(y)}$ ガモシ可約ナラバ $\overline{y}$ ハ $\overline{\varphi_z(y)}$ ノ因數 $\overline{\psi_z(y)}$ ヲ零ナラシム。

$$\overline{\psi_z(y)} = \frac{\overline{Q(y, z)}}{\overline{B(z)}}$$

$Q(y, z)$ ハ y, z ノ多項式ノ $B(z)$ ハ z ノ多項式デアル．$\overline{B(z)}$ ト $\overline{f_y(z)}$ トハ素デ

$$\overline{\psi_z(y)} = \frac{\overline{f_y(z)}\cdot\overline{G(y, z)}}{\overline{B(z)}}$$

$$= \frac{\overline{\varphi_z(y)}\cdot\overline{G(y, z)}\cdot\overline{K(y, z)}}{\overline{A(y)}\cdot\overline{B(z)}}$$

$\overline{A(y)}$ ト $\overline{\varphi_z(y)}$ ハ (1) ニ依リ素デアルカラ $\overline{\psi_z(y)}$ ハ $\overline{\varphi_z(y)}$ デ割レルコトニナリ不合理デアル．

〔定理8ノ証〕　Λ ノ代數的閉拡大ヲ Λ^* トス．$K\Lambda^*$ ニ於ケルアル一次ノ素因子 $\mathfrak{Q}$ ヲトリ，Riemann-Roch

ノ定理ニヨリ $\dfrac{\mathfrak{Q}^r}{\mathfrak{a}}=y$, $(\mathfrak{Q},\mathfrak{a})=1$ ナルKノ元 y ヲトル。

但シ r ハ素數トス。Λ^* ノ代リニ Λ ノアル有限次代數的拡大 Λ' ヲトレバイヽ。$K\Lambda'=K'$ トス。

K' ハ $\Lambda'(y)$ ノ r 次代數的拡大トナル。z ガ $\Lambda'(y)$ ニ属スルナラバ $\Lambda'(y)$ ニ u ヲ添加シテ K' トナル。

z ノ $\Lambda'(y)$ ニ於ケル既約一次方程式ハ勿論 $\Lambda'(y)$ ニ於テ絶對既約デアルカラ Lemma ニヨリ y ノ $\Lambda'(z)$ ニ於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(z)}$ ニ於テ既約トナル。（有限個ノ $\mathfrak{p}$ ヲ除キ）

ソコデ u ノ $\Lambda'(y)$ ニ於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)}$ ニ於テ既約ナルコトガ言ヘレバ，u ノ $\Lambda'(z)$ ニ於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(z)}$ ニ於テ既約トナル。z ガ $\Lambda'(y)$ ニ属サヌトキハ $\Lambda'(y)$ ニ z ヲ添加スレバ K' トナル。（r ガ素數ダカラ）ソコデ K' ハ $\Lambda'(z)$ ニ y ヲ添加シタモノトナル。z ノ $\Lambda'(y)$ ニ於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)}$ ニ於テ絶対既約ナルコトガ云ヘルナラバ，Lemma ニヨリ有限個ノ $\mathfrak{p}$ ヲ除キ y ノ $\Lambda'(z)$ ニ於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(z)}$ ニ於テ絶対既約トナル。u ハ $\Lambda'(z,y)$ ヲ生ゼシムルカラ u ノ $\Lambda'(z)$ ニ於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(z)}$ ニ於テ絶対既約デアル。（以上ハ有限個ノ $\mathfrak{p}$ ヲ除イテイヘル）

ソコデ問題ハ z ノ $\Lambda'(y)$ ニ於ケル絶對既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)}$ ニ於テ絶対既約ナル如ク亦 u ノ $\Lambda'(y)$ ニ於ケル絶対既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)}$ ニ於テモ絶対既約ナル如クシ得ルコト

ヲ（有限個ノ$\mathfrak{P}$ヲ除キ）証明スレバイヽ。$\Lambda(z, y)$ 或ハ $\Lambda'(u, y)$ ヲ K' トシ $\Omega = \Lambda'(y)$ トシテ K' ノ Restbild $\overline{K'}$ ニハ Nullteiler ガナイヤウニナルコトヲ言ヘバイヽ。K' ノ $\Lambda'(y)$ ノ上ノ Hauptordnung ノ Modulbasis $w_1, w_2, \cdots\cdots w_r$ トス。w_i ヲ u 或ハ z デ表ハシタトキ及ビ u 或ハ z ヲ w_i デ表ハシタトキノ係数 $\mathfrak{P}$-ganz ナル如ク $\mathfrak{P}$ ヲ撰ブ。

次ニ $\dfrac{\mathfrak{L}e}{Q\mathfrak{a}'} = (B)$ ナル元及ビ $\dfrac{QC}{\mathfrak{a}''} = (A)$ ナル元ヲトル。但シ $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ ハ $\mathfrak{a}$ ノ素因子ノミ含ミ $\mathfrak{L}e\, C$ ハ Q ニ素トスル。（コレハ Riemann-Roch ノ定理ニヨリ可能）

$$AB = \frac{\mathfrak{L}e\, C}{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''}$$ ハ ganz デ Q ニ素デアル。

$$AB \equiv k_0 \quad \mathrm{mod}\ Q_y, \quad k_0 \subset \Lambda$$

A, B ヲ w_i デ表ハシタトキ係数 $\mathfrak{P}$-ganz ナル如ク，亦 k_0 ガ $\mathfrak{P}$ ニ素ナル如ク $\mathfrak{P}$ ヲ撰ブ。

$$w_i \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A^j \ \mathrm{mod.}\ Q_y^r, \quad a_{ij} \subset \Lambda'$$

トシ，a_{ij} ガスベテ $\mathfrak{P}$-ganz ナル如ク $\mathfrak{P}$ ヲトル. Q_y^r ノ Modulbasis ハ明ラカニ $y w_i$ デアルカラ $\sum c_i w_i$, $c_i \subset \Lambda'$ ハ $c_i = 0$ ノトキニ限リ Q_y^r ニ属スル.

故ニ $|a_{ij}| \neq 0$. $\mathfrak{P}$ ヲ $|a_{ij}|$ ニ素ナル如クトル. シカラバ c_i ガ $\mathfrak{P}$-ganz ナ Λ' ノ元デスベテハ $\mathfrak{P}$ ニ属セヌ

トスルトキ

$$\sum c_i w_i \equiv \sum k_j A^j \mod Q_y^r,\ k_j \subset$$ バ

ナラバ k_j ハスベテハ $\mathfrak{p}$ ニ属セス．サテ K' ノ任意ノ元E

ヲトッタトキ

$$E w_i = \sum_{j=1}^{r} \mu_{ij} w_j$$

トシタトキ E ノ norm $|\mu_{ij}|$ ノ係数がスベテ $\mathfrak{p}$ ニ属スルトキハ $\overline{E}$ ハ $\overline{K'}$ ニ於ケル Nullteiler デアル．$\overline{E}$ が零ナルトキ以外カヽル事ノナイコトヲ云ヘバイヽ。

今 $E = \sum_{i=1}^{r} c_i[y] w_i$ トシ $c_i[y]$ ハ y ノ多項式デスベテハ y デ割レズ且ツ常數項ノ中ニ $\mathfrak{p}$ ニ素ナルモノガアル場合ニツイテミル（係數ハ勿論スベテ $\mathfrak{p}$-ganz）

$$\sum_{i=1}^{r} c_i[y] w_i \equiv k_\nu A^\nu \quad \mod Q_y^{\nu+1}$$

$$0 \leqq \nu < r$$

トシ k_ν ハ $\mathfrak{p}$ ニ素トシテイヽ（$k_\nu A^\nu$ ノ項ノ前ニ $\mathfrak{p}$ ニ属スルモノガアルトキハ左辺ニ移シテ考ヘル）．$\nu = 0$ ナラザルトキハ B^ν ヲ乗ジ

$$\sum c_i[y] w_i B^\nu \equiv k_\nu A^\nu B^\nu \equiv k_\nu k_0^\nu$$
$$\mod Q_y$$

$\sum c_i[y] w_i B^\nu$ ハ ganz デコノ norm ハ $\sum c_i[y] w_i$ ノ norm ト B^ν ノ norm ノ積デアル．B^ν ノ norm が $\mathfrak{p}$-ganz ナルコトハ容易ニワカル。

$$\sum c_i[y]\,w_i B^{\nu} = k_\nu k_0^{\nu} + \theta$$
$$\theta \subset Q_y$$

デθハ ganz. ソノ満足スルr次ノ方程式ノ最高羃ハ1ソレ以外ノ係數ハスベテyデ割レル。何トナレバθトQ-Beitrag ヲQ^sトシタトキ$S \geqq r$ナルトキハ明ラカダカラ$S < r$トス. $(S, r) = 1$. yデ割レヌ係數ヲ有スル項アリトシ, ソノ中デQ-Beitrag ノ最小ナル項ガθ^{μ}ノ項ナリトスル。$(\mu > 0)$. シカラバソノ項ノQ-Beitrag ハ$Q^{\mu s}$デアル. $(\mu, r) = 1$. 他ノ項$\theta^{\mu'}$ノBeitrag ハ$Q^{\mu' s}$。

$\mu' S \equiv \mu S \mod r$ ナルコトハナイカラ不合理トナル. ノコデ$k_\nu k_0^{\nu} + \theta$ノ Norm ノ常數項ハ$k_\nu^{r} k_0^{\nu r}$デコレハ$\mathfrak{P}$ニ素デアル. ソコデ$\sum c_i[y]\,w_i$ノ Norm ノ係數ハスベテハ$\mathfrak{P}$ニ屬サヌ. 即チ$\sum \overline{c_i[y]}\;\overline{w_i}$ノ Norm ハ零デハナイ。故ニ$\overline{K'}$ニハ Nullteiler ガナイ。

(証終)

KガΛノ代數的拡大ト unabhängig デナイトキハ$\overline{K}$ガ体トナル如キ Restbildung ノ存在セヌコトガアル。例ヘバ$\Lambda = k(\xi)$デ, kハ標數$\neq 0$ナル Primkörper ノ代數的閉拡大デξハ不定元トスル. シカラバ$K = \Lambda(\sqrt{\xi}, z)$ハ如何ナル Restbildung ニヨッテモ体トナシヌ。何トナレバ定理7ノ系ニヨリ可能ナ Restbildung ハkノ上ノ Restbildung ノミデ dimension 1デアル。ソコデξガkノ元aニ abbild サレルカラ$u^2 - \xi = 0$ハ常

ニ可約トナル。

尚定理5ト定理8ニヨリ

〔定理9〕 Λガ任意ノ体デKハ$\Lambda(z)$ノ*einfach*ナ有限次代数的拡大体デΛノ代数的拡大ト*unabhängig*デ且ツΛノアル部分体kニ関シテ*Dimension*有限トスル。シカラバKノ*Restbild* $\overline{K}$ガ$\overline{\Lambda}(z)$ノ上ノ代数函数体デアル如キ$k(z)$ノ上ノ*Restbildung*無数ニアル。特ニ$\overline{\Lambda}$ヲkノ代数的拡大ナラシメ得ル。

（未 完）

〔附 記〕 本紙第223号ニ於ケル*Herbrand*ノ*Lemma*ニツイテノ記事中cガ(e_1, e_2)ノ約数ナルコト及ビ(B)ノ結果ガ成立ツコトハ*Bauer*ガ1940年ニ*Szeged*ノ*Acta*ニ発表シテヰルコトヲ守屋氏ヨリ御注意ガ有リマシタ。